

Exercices – Séquence n° 17 – PROBABILITÉS (II) :

sommés de variables aléatoires

Contenus	- Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$. - Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X, Y et relation d'additivité $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ / relation $V(aX) = a^2V(X)$. - Application à l'espérance, la variance et l'écart-type de la loi binomiale. - Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi. - Espérance, variance, écart-type de la somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et de la moyenne $M_n = S_n/n$.
Capacités	- Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples. - Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité. - Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

COMPÉTENCES :**Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER**Exercice 1** [Re-Mo-Ra-Ca-Co]

Amanda lance deux pièces de monnaie, l'une de 1€, l'autre de 2€.

X est la variable aléatoire qui vaut 1 si elle obtient pile avec la pièce de 1€ et 0 sinon.

Y est la variable aléatoire qui vaut 2 si elle obtient pile avec la pièce de 2€ et 1 sinon.

- Recopier le tableau ci-contre en complétant les pointillés par les valeurs prises par la somme $X + Y$ et par les probabilités qui conviennent.
- En déduire la loi de probabilité de $X + Y$.

	Y	1	2
X			
0	...	...	...
1	...	...	...

Exercice 2 [Re-Mo-Ra-Ca-Co]

On dispose de deux sacs opaques. L'un contient trois papiers portant les numéros 0, 2 et 4, l'autre contient cinq papiers : deux portant le numéro 1 et trois portant le numéro 3. On tire au hasard et successivement un papier de chaque sac et on additionne les numéros obtenus. On appelle Z la variable aléatoire égale au résultat obtenu.

- Définir deux variables aléatoires X et Y telles que $Z = X + Y$.
- Déterminer les valeurs prises par Z et sa loi de probabilité.

Exercice 3 [Ra-Ca-Co]

Voici les lois de probabilité de deux variables aléatoires X et Y définies sur l'univers d'une même expérience aléatoire.

a_i	0	10	25
$P(X = a_i)$	0,42	0,28	0,30

b_i	10	15
$P(Y = b_i)$	0,4	0,6

- Déterminer l'espérance de la variable aléatoire somme $S = X + Y$.
- Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $Z = 4X$.

Exercice 4 [Ra-Ca-Co]

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,1$ et Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n' = 10$ et $p' = 0,1$.

- 1) Quelles sont les valeurs possibles de la variable $X + Y$?
- 2) Calculer $E(X+Y)$.

Exercice 5 [Ra-Ca-Co]

Soient X une variable aléatoire d'espérance 10 et de variance 4, et Y une variable aléatoire d'espérance -2 et de variance 1. Calculer, si possible, l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes :

- a) $Z = -2X$ b) $T = X + Y$ c) $U = Z + 1$ d) $W = 0,5 Z$.

Exercice 6 [Ra-Ca-Co]

Un loueur de bateaux dispose de six bateaux qu'il loue à la journée. X est la variable aléatoire qui, à une journée, associe le nombre de bateaux loués. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-contre :

- 1) Déterminer la valeur manquante du tableau.

Les frais fixes journaliers du loueur s'élèvent à 300 € et la marge bénéficiaire de location d'un bateau est de 150 €.

B est la variable aléatoire qui donne le bénéfice d'une journée.

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	0,06	0,11	0,18	0,22	0,20		0,08

- 2) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.
- 3) Exprimer B en fonction de X .
- 4) Dédire de ce qui précède le bénéfice moyen journalier de ce loueur de bateaux.

Exercice 7 [Mo-Ra-Ca-Co]

Dans une fête foraine, un jeu de hasard se déroule en deux temps.

Le joueur fait d'abord tourner la roue ci-contre et gagne le montant indiqué dans le secteur obtenu.

Puis il pioche un jeton bonus dans un sac qui contient :

25 jetons marqués 0 € ; 20 jetons marqués 2 € et 5 jetons marqués 5 €.



- 1) Calculer la probabilité d'obtenir le même gain avec la roue et avec le jeton bonus. On pourra noter X et Y les variables donnant respectivement le gain obtenu avec la roue et le gain obtenu avec le jeton bonus.
- 2) On note Z la variable aléatoire qui donne le gain final du joueur. Déterminer la variance de Z .

Exercice 8 [Ra-Ca-Co]

Un fabricant de produit pharmaceutiques est censé produire un médicament ayant 2,4 mg de principe actif.

Le robot qui teste le dosage commet inévitablement des erreurs de mesure. Une étude sur le long terme, avec un instrument de mesure ayant une précision au μg , a montré que la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale à la masse du principe actif est la suivante :



x_i (en mg)	2,398	2,399	2,4	2,401	2,402
$p_i = P(X = x_i)$	0,3	0,1	0,1	0,3	0,2

- 1) On s'intéresse à la variable aléatoire D égale à la différence, exprimée en mg, entre la masse du principe actif et 2,400 mg. Déterminer la loi de probabilité de D , puis calculer son espérance et sa variance.
- 2) En déduire l'espérance et la variance du principe actif.

Exercice 9 [Ra-Ca-Co]

Le biathlon est une épreuve de sports d'hiver dans laquelle l'athlète alterne entre des courses de ski de fond et des tirs à la carabine. Lors d'un entraînement, une athlète effectue une course de 3 km suivie de 4 tirs. On considère, ici, que chaque tir raté donne une pénalité d'une minute.

On note X la variable aléatoire égale à son temps pour la course,

Y la variable aléatoire égale à son temps de pénalité et Z celle qui est égale à son temps total. Les temps sont en minutes.

Voici les lois de probabilité de X et Y :

a_i	7,5	8	8,5	9	9,5	10
$P(X=a_i)$	0,03	0,1	0,5	0,2	0,1	0,07

b_i	0	1	2	3	4
$P(Y=b_i)$	0,6	0,2	0,1	0,05	0,05



- 1) Calculer les variances de X et Y . (Arrondir au millièmme).
- 2) En déduire la variance de Z .

Exercice 10 [Mo-Ra-Ca-Co]

Quand elle va au restaurant, Nelly a l'habitude de poster un avis sur internet. X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'étoiles qu'elle attribue à un restaurant. En se basant sur les statistiques de ses avis précédents, on a pu établir la loi de probabilité de X :

a_i	1	2	3	4	5
$P(X=a_i)$	0,03	0,12	0,20	0,35	0,30

On considère une série de dix futurs avis, que l'on peut considérer comme un échantillon de la loi de X .

- 1) Quelle est la taille de cet échantillon ?
- 2) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .
- 3) En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la somme S_{10} des étoiles attribuées pour une telle série.

Exercice 11 [Ra-Ca-Co]

Un producteur conditionne 40 mandarines par caisse.

Les masses de mandarines, en grammes, sont réparties selon le tableau :

Masse	58	59	60	61	62
Fréquence	0,15	0,20	0,25	0,21	0,19

X est la variable aléatoire qui donne la masse d'une mandarine prise au hasard dans le stock. La quantité produite est assez grande pour considérer qu'une caisse de 40 est un échantillon de taille 40 de la loi de probabilité de X .

- 1) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .
- 2) En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la moyenne M_{40} .

Exercice 12 [Mo-Ra-Ca-Co]

Anissa est abonnée à un magazine. Chaque numéro contient 40 pages, et elle a remarqué que la probabilité qu'une page contienne un encart publicitaire est 0,2.

On admet que chaque page est indépendante des autres et on définit la variable aléatoire X qui compte le nombre total de pages contenant un encart publicitaire dans un numéro de ce magazine.

Pour les questions 3) et 4), arrondir au millièmme.

- 1) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier.
- 2) Calculer la probabilité qu'un numéro ait exactement 10 pages avec un encart publicitaire.
- 3) Calculer la probabilité que, pour un numéro donné, au moins un quart des pages contiennent un encart publicitaire.
- 4) Calculer l'espérance et l'écart-type de X .
- 5) Anissa reçoit 52 numéros de ce magazine en une année. On admet que ces numéros sont, en ce qui concerne les pages publicitaires, indépendants les uns des autres. Déterminer l'espérance et l'écart-type du nombre total de pages publicitaires sur un tel ensemble de 52 numéros.

Exercice 13 [Ch- Mo-Ra-Ca-Co]

On dispose d'un dé équilibré à six faces, sur lequel la moitié des faces sont numérotées 0, un tiers des faces sont numérotées 1 et la dernière face est numérotée 2. Soit X la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu quand on lance ce dé.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- On considère la fonction écrite en langage Python ci-contre qui simule un lancer de ce dé. Compléter les deux cadres.
- Modifier ce programme afin d'obtenir un échantillon de taille n où n est un nombre entier ($n \geq 1$).
- Saisir ce nouveau programme et l'exécuter pour $n = 5$.

```

1 from random import *
2 def X():
3     r=random()
4     d=1
5     if r<=1/2:
6         d=
7     if r>= :
8         d=2
9     return d

```

Exercice 14 [Ra-Ca-Co]

On reprend la situation de l'exercice précédent.

- Calculer l'espérance de la variable aléatoire X .
- On considère la fonction écrite en langage Python ci-contre à saisir à la suite du programme de l'énoncé de l'exercice précédent.
 - Quel est son rôle ?
 - La saisir, puis l'exécuter pour des valeurs de n de plus en plus grandes. Qu'observe-t-on ?

```

1 from random import *
2 def Moyenne(n):
3     som=0
4     for i in range(n):
5         som=som+X()
6     m=som/n
7     return m

```

Exercice 15 [Ch-Mo-Ra-Ca-Co] Bac Centres étrangers, juin 2024

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.

À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.

Dans ce contexte, on appelle « tirage » le triplet et donc la liste ordonnée des trois numéros obtenus. Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est (4 ; 5 ; 1).

- Déterminer le nombre de tirages possibles.
- Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
- En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché. Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

- Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1 .
- Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1 .

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

- Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S .
- Déterminer $P(S = 24)$.
- Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
 - Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
 - En déduire la probabilité de gagner un lot.